第 12 講　空間のベクトル

PART1　空間の座標

1　(1)　3 点 A$(3,\ 2,\ 0)$，B$(-1,\ 4,\ -2)$，C$(2,\ 0,\ -1)$ から等距離にある yz 平面上の点 P の座標を求めよ。

(2)　2 点 A$(2,\ -1,\ 1)$，B$(1,\ 4,\ 3)$ と，xy 平面上の点 P に対して，AP＋PB の最小値を求めよ。

Point Pickup

2 点 A$(x_1,\ y_1,\ z_1)$，B$(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 間の距離は

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

(1)　座標空間において

xy 平面上の点：$(x,\ y,\ 0)$　　yz 平面上の点：$(0,\ y,\ z)$　　zx 平面上の点：$(x,\ 0,\ z)$

と表すことができる。

(2)　折れ線の長さの最小値は，座標平面に関して対称な点をとり，線分の長さを考える。

P$(a,\ b,\ c)$ と各座標平面に関して対称な点の座標は，次のように表される。

xy 平面：$(a,\ b,\ -c)$　　yz 平面：$(-a,\ b,\ c)$　　zx 平面：$(a,\ -b,\ c)$

第12講　PART1　確認問題

1　3 点 A$(-1,\ 1,\ -1)$，B$(4,\ 0,\ 3)$，C$(3,\ 2,\ 2)$ から等距離にある xy 平面上の点 P の座標を求めよ。

P(ア , イウ , エ)

2　2 点 A$(1,\ 1,\ 4)$，B$(3,\ 3,\ 0)$ と，zx 平面上の点 P に対して，AP＋PB の最小値を求めよ。

最小値　オ

第 12 講　空間のベクトル

PART1　空間の座標

1 (1) 3 点 A(3, 2, 0), B(−1, 4, −2), C(2, 0, −1) から等距離にある yz 平面上の点 P の座標を求めよ。

(2) 2 点 A(2, −1, 1), B(1, 4, 3) と, xy 平面上の点 P に対して, AP+PB の最小値を求めよ。

(1) $\mathrm{P}(0,\ y,\ z)$ とする。

$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ より　$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$

よって　$(0-3)^2+(y-2)^2+(z-0)^2=(0+1)^2+(y-4)^2+(z+2)^2$

$y-z=2$ …… ①

$\mathrm{AP}=\mathrm{CP}$ より　$\mathrm{AP}^2=\mathrm{CP}^2$

よって　$(0-3)^2+(y-2)^2+(z-0)^2=(0-2)^2+(y-0)^2+(z+1)^2$

$2y+z=4$ …… ②

①, ②より　$y=2,\ z=0$　　したがって, 点 P の座標は　$(0,\ 2,\ 0)$

(2) 2 点 A, B は, xy 平面に関して同じ側にある。

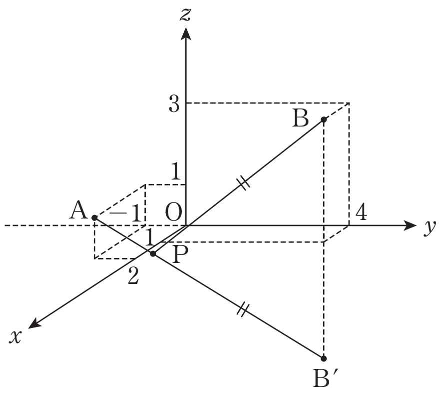
xy 平面に関して点 B と対称な点を B′ とすると

$\mathrm{B}'(1,\ 4,\ -3)$

$\mathrm{PB}=\mathrm{PB}'$ であるから

$\mathrm{AP}+\mathrm{PB}=\mathrm{AP}+\mathrm{PB}'\geqq \mathrm{AB}'$

したがって, AP+PB が最小となるのは, 3 点 A, P, B′ が一直線上にあるとき, すなわち点 P が線分 AB′ と xy 平面の交点のときである。



よって, 求める最小値は　$\mathrm{AB}'=\sqrt{(1-2)^2+(4+1)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{42}$

第12講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イウ：-1，エ：0

[解説]

P$(x,\ y,\ 0)$ とする。[A]

$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ より　$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$

よって

$$(x+1)^2+(y-1)^2+(0+1)^2$$
$$=(x-4)^2+(y-0)^2+(0-3)^2 \quad \text{[B]}$$

ゆえに　$5x-y-11=0$ ……①

$\mathrm{BP}=\mathrm{CP}$ より　$\mathrm{BP}^2=\mathrm{CP}^2$

よって

$$(x-4)^2+(y-0)^2+(0-3)^2$$
$$=(x-3)^2+(y-2)^2+(0-2)^2 \quad \text{[B]}$$

ゆえに　$x-2y-4=0$ ……②

①，②より　$x=2,\ y=-1$

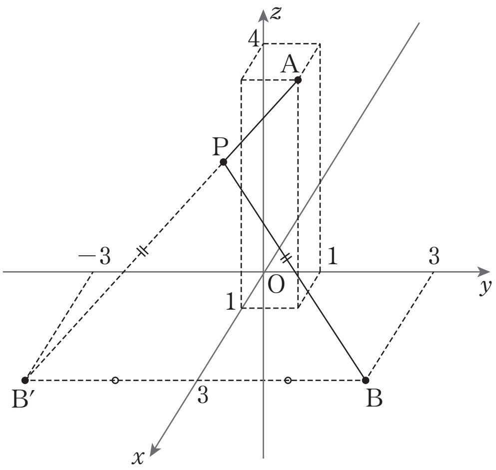
したがって，点Pの座標は　**$(2,\ -1,\ 0)$**

[A]　座標空間において
xy 平面上の点：$(x,\ y,\ 0)$
yz 平面上の点：$(0,\ y,\ z)$
zx 平面上の点：$(x,\ 0,\ z)$
と表すことができる。

[B]　2点 A$(x_1,\ y_1,\ z_1)$，B$(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 間の距離 AB は
$$\mathrm{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

2 [正解] オ：6

[解説]



2 点 A，B は，zx 平面に関して同じ側にある。

zx 平面に関して点 B と対称な点を B′ とすると

$$B'(3,\ -3,\ 0)$$ [C]

PB＝PB′ であるから

$$AP+PB=AP+PB'\geqq AB'$$

したがって，AP＋PB が最小となるのは，3 点 A，P，B′ が一直線上にあるとき，すなわち点 P が線分 AB′ と zx 平面の交点のときである。

よって，求める最小値は

$$AB'=\sqrt{(3-1)^2+(-3-1)^2+(0-4)^2}$$ [B]

$$=\mathbf{6}$$

[C]　点 P$(a,\ b,\ c)$ と各座標平面に関して対称な点の座標は，次のように表される。

xy 平面：$(a,\ b,\ -c)$
yz 平面：$(-a,\ b,\ c)$
zx 平面：$(a,\ -b,\ c)$